

## CHƯƠNG I. TÍNH HÌNH HỌC

### Bài 1. NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ CÁC TIÊN ĐỀ TÍNH HÌNH HỌC

#### I. Các khái niệm cơ bản

##### 1. Vật rắn tuyệt đối

Vật rắn tuyệt đối là tập hợp các chất điểm mà khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ thuộc vật luôn luôn không đổi.

(Vật rắn tuyệt đối là vật có hình dáng hình học luôn luôn không đổi trong quá trình chuyển động).

##### 2. Trạng thái cân bằng

Là trạng thái vật rắn đứng yên hoặc chuyển động đều so với một vật khác được chọn làm chuẩn (hệ quy chiếu). Trong tĩnh học, hệ quy chiếu được chọn phải thỏa mãn định luật quán tính của Newton (hệ quy chiếu đứng yên tuyệt đối), cân bằng như vậy được gọi là cân bằng tuyệt đối.

##### 3. Lực

###### a. Định nghĩa

Lực là tác động tương hỗ giữa các vật mà kết quả gây nên sự thay đổi hình dáng và trạng thái chuyển động của các vật đó.

Lực được ký hiệu bằng các chữ in hoa có mũi tên ở trên:  $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}, \vec{T} \dots$

###### b. Đơn vị

Đơn vị của lực là Newton (N).

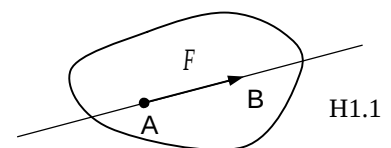
$$1\text{KN} = 10^3 \text{N}$$

$$1\text{MN} = 10^3 \text{KN} = 10^6 \text{N}$$

###### c. Các yếu tố xác định lực

Lực là đại lượng vectơ được xác định bởi ba yếu tố:

- . Điểm đặt
- . Phương chiều
- . Trắc



###### d. Cách biểu diễn lực

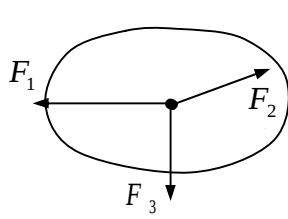
Vectơ lực có:

- . Góc trùng với điểm đặt lực.
- . Hướng (phương chiều) trùng với hướng của lực.
- . Độ dài tỉ lệ với trọng của lực.

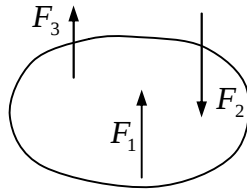
Đường thẳng chứa vectơ lực gọi là đường tác động lực.

#### 4. Các định nghĩa khác

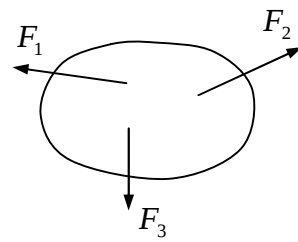
a - Hệ lực: Là tập hợp nhiều lực cùng tác động lên một vật.



Hệ lực đồng quy



Hệ lực song song



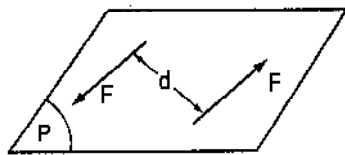
Hệ lực bất kỳ

H1.2

Hệ lực ký hiệu:  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$

b - Ngẫu lực: là hệ gồm có hai lực song song, ngược chiều và cùng cường độ

Một ngẫu lực được xác định bởi các yếu tố sau:



H1.3

- Moment phẳng tác động của ngẫu lực: là moment phẳng chia hai lực thành phần của ngẫu lực (gọi tắt là moment phẳng ngẫu lực)

- Chiều quay của ngẫu lực trong mặt phẳng ngẫu lực (cùng hay ngược chiều kim đồng hồ)

- Cường độ tác động của ngẫu lực được đặc trưng bởi tích số  $F \cdot d$  được gọi là trị số mô men ngẫu lực. Trong đó  $F$  là trị số của các lực thành phần,  $d$  là khoảng cách vuông góc giữa hai lực thành phần, được gọi là cánh tay đòn của ngẫu lực.

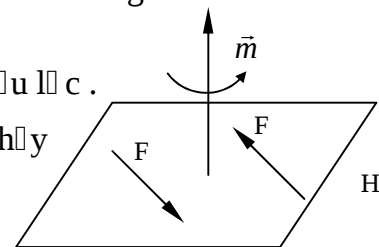
Đơn vị ngẫu lực: Nm và các bội số của nó là KNm, MNm

Trong không gian: Ngẫu lực được biểu diễn bằng vectơ mô men ngẫu lực, ký hiệu là  $\vec{m}$ , được xác định như sau:

Phương: vuông góc với mặt phẳng ngẫu lực.

Chiều nhìn từ ngoài xuống gốc vectơ thay

chiều quay của ngẫu lực ngược chiều quay kim đồng hồ.



H1.4

Mô đun của vectơ mô men ngẫu lực bằng

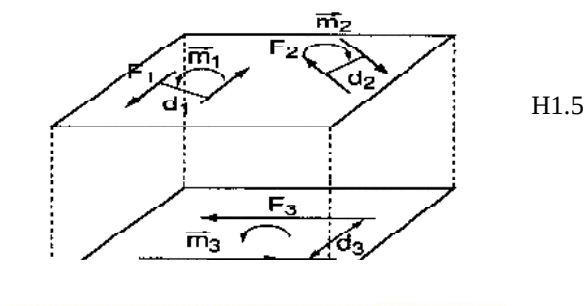
trị số mô men ngẫu lực.

Quy ước: gốc vectơ  $\vec{m}$  nằm trên mặt phẳng ngẫu lực.

Trong trường hợp các ngẫu lực tác động trong cùng một mặt phẳng hoặc trong các mặt phẳng song song với nhau, ngẫu lực được biểu diễn qua mô men đối số ngẫu lực, ký hiệu  $\bar{m} = \pm F \cdot d$

Quy ước:  $m > 0$  khi chiều quay ngược chiều kim đồng hồ.  
 $m < 0$  trong trường hợp ngược lại.

Ví dụ

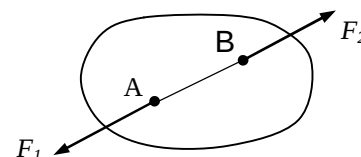


H1.5

## II. Các tiên đề tĩnh học

### 1. Tiên đề 1 (Tiên đề về cặp lực cân bằng)

Điều kiện cần và đủ để hai lực tác dụng lên một vật rắn cân bằng là chúng phải trái nhau.

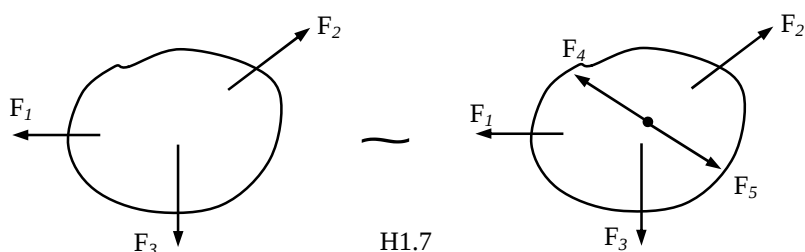


### 2. Tiên đề 2 (Tiên đề về thêm hoặc bớt những cặp lực cân bằng)

H1.6

Tác dụng của hai lực cân bằng lên một vật rắn không thay đổi nếu ta thêm vào hoặc bớt đi những cặp lực cân bằng.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5) \quad (1.1)$$

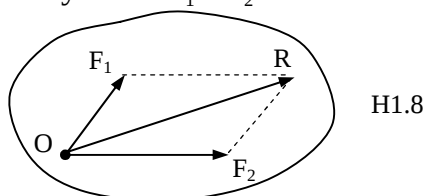


H1.7

### 3. Tiên đề 3 (Tiên đề về hình bình hành)

Hai lực đồng quy tại một điểm tác dụng vào một vật rắn tại điểm đó và được biểu diễn bằng hai vectơ đồng quy chéo hình bình hành mà hai cạnh là hai lực đã cho.

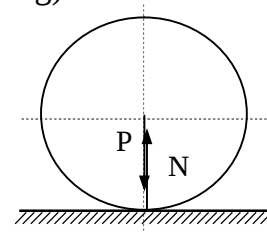
$$\vec{R} \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \text{ hay } \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (1.2)$$



H1.8

#### 4. Tiên đề 4 (Tiên đề về lực tác động và phản lực tác động)

Lực tác động và phản lực là hai lực trực đối.

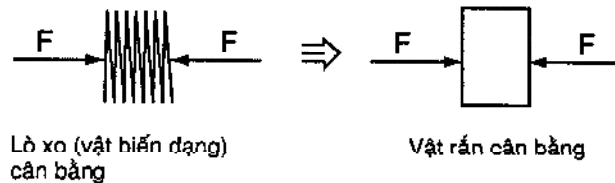


H1.9

Chú ý: Lực tác động và phản lực tác động không phải là hai lực cân bằng vì chúng đặt vào hai vật khác nhau.

#### 5. Tiên đề 5 (Tiên đề hoá rắn)

Một vật biến dạng đã cân bằng dưới tác động của một hệ lực thì khi hoá rắn nó vẫn cân bằng.



H1.10

Như vậy hệ lực tác động lên “vật biến dạng cân bằng” cũng thỏa mãn các điều kiện của hệ lực tác động lên vật rắn cân bằng. Do đó có thể sử dụng các kết quả khảo sát đối với vật rắn cân bằng cho trường hợp vật rắn biến dạng cân bằng. Tuy nhiên nó chỉ là điều kiện cần chứ không phải là điều kiện đủ. Để khảo sát bài toán cân bằng vật rắn biến dạng, ngoài ra kết quả nhận được khi khảo sát vật rắn cân bằng, cần thêm vào các giới thiết về biến dạng

### III. Liên kết và phản lực liên kết

#### 1. Khái niệm về vật tự do và vật chịu liên kết

- Vật tự do khi nó có thể thực hiện chuyển động tùy ý theo mọi phương trong không gian mà không bị cản trở.

- Vật chịu liên kết (vật không tự do) khi nó có một vài phương chuyển động bị cản trở (còn gọi là vật khảo sát).

- Vật gây ra sự cản trở chuyển động của vật khảo sát gọi là vật gây liên kết.

Do tác động tương ứng:

- Vật khảo sát tác động lên vật gây liên kết một lực gọi là lực tác động.

- Vật gây liên kết tác động lên vật khảo sát một lực gọi là phản lực liên kết.

- Như mọi điều kiện cần trở chuyển động của vật khảo sát gọi là liên kết.

Phản lực liên kết có những tính chất sau:

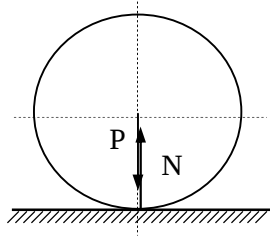
- Phản lực liên kết bao giờ cũng đặt vào vật khi có sự tiếp xúc giữa hai vật.
- Phản lực liên kết cùng phương, ngược chiều với chiều chuyển động bị cấm trên của vật khi có sự tiếp xúc.
- Trượt của phản lực liên kết phụ thuộc vào lực tác động lên vật khi có sự tiếp xúc.

## 2. Một số liên kết thông dụng

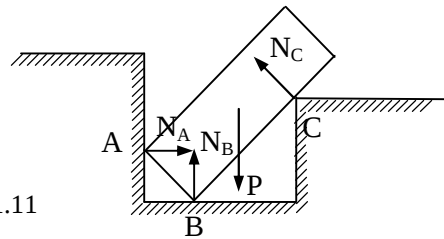
a. Liên kết hoàn toàn trơn (không có ma sát) hay liên kết tựa

Vật khi có sự tiếp xúc trên vật gây liên kết. Phản lực liên kết có phương vuông góc với mặt tiếp xúc chung giữa vật khi có sự tiếp xúc và vật gây liên kết, có chiều hướng vào vật khi có sự tiếp xúc.

Ký hiệu  $\vec{N}$ , trượt  $N$  chia biệt.



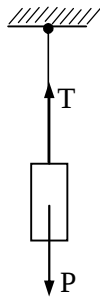
Hình 1.11



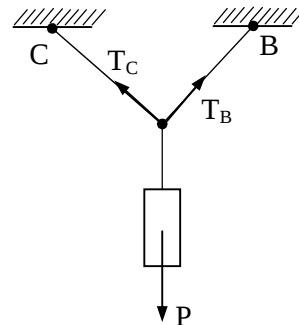
b. Liên kết dây mềm

Vật gây liên kết là dây treo trên vật rời. Phản lực liên kết có phương dọc theo dây và ngược chiều kéo căng.

Ký hiệu  $\vec{T}$ , trượt  $T$  chia biệt.



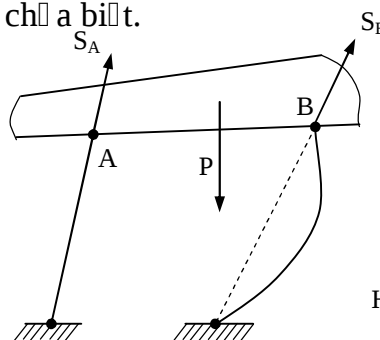
Hình 1.12



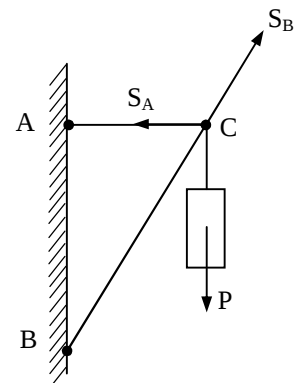
c. Liên kết thanh

Vật gây liên kết là thanh thẳng hay cong, không biến dạng. Phản lực liên kết có phương dọc theo thanh, có chiều hướng vào vật khi có sự tiếp xúc.

Ký hiệu  $\vec{S}$ , trượt  $S$  chia biệt.



H1 - 13



d. Liên kết bản lề: Có hai loại

Liên kết bản lề di động:

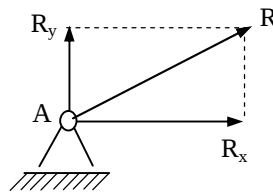
- Phần lồi gối đỡ phần lồi của liên kết tựa, đặt tại tâm bản lề.
- Ký hiệu  $\vec{R}$ , trục  $R$  chỉ a biết.



H1 - 14

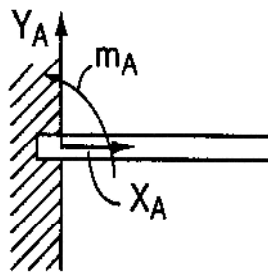
Liên kết bản lề cố định

- Bản lề cố định còn trục vật khớp sát chuyển động theo phương ngang và phương thẳng đứng. Do đó phần lồi của liên kết có hai thành phần  $\vec{R}_x$  và  $\vec{R}_y$ .



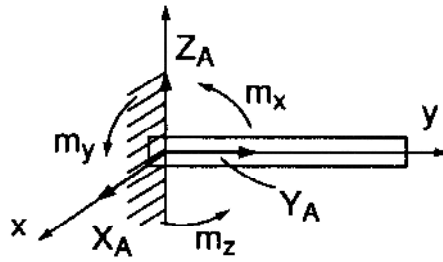
H1 - 15

e. Liên kết ngàm: là liên kết khi vật đỡ có nối cứng vào mặt vật khác. Trong trường hợp ngàm phẳng, phần lồi của liên kết gồm hai góc vuông với nhau và mặt ngàm lồi có nằm trong mặt phẳng chứa hai trục.



H1 - 16

Đối với ngàm không gian, phần lồi của liên kết gồm ba thành phần lồi vuông góc với nhau (đặt theo ba trục tọa độ) và ba thành phần ngàm lồi trong mặt phẳng toạ độ.



H1 - 16

Khi khảo sát vật rắn, ta phải tách vật rắn ra khỏi liên kết và xác định合力 tác động lên vật rắn đó. Hợp lực tác động gồm các lực cho và các phản lực liên kết.

Muốn thế, ta nên thay các liên kết bằng các phản lực liên kết tương ứng, công việc đó gọi là giải phóng liên kết. Sau khi giải phóng liên kết, vật khảo sát được coi như vật rắn tự do cân bằng chịu tác động của hợp lực cho và các phản lực liên kết.

### 3. Tiên đề 6: Tiên đề giải phóng liên kết

“Vật chịu liên kết có thể xem là vật tự do nếu thay thế tác động của vật gây liên kết lên vật khảo sát bằng các phản lực liên kết tương ứng”

## IV. Các quy

### 1. Quy 1

Tác động của lực không thay đổi khi ta chuyển lực dọc theo đường tác động của nó (lực được coi là vectơ trượt)

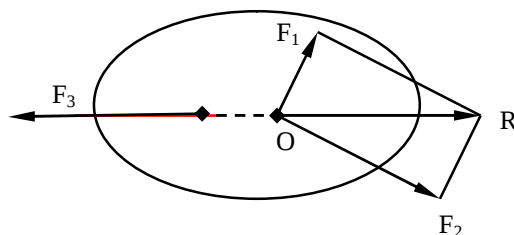
### 2. Quy 2

Với một hệ lực cân bằng thì một lực bất kỳ thuộc hệ lực này có thể coi là hợp lực của các lực còn lại.

$$\begin{aligned} (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) &\sim 0 \\ -\vec{F}_1 &\sim (\vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \end{aligned} \quad (1.3)$$

### 3. Định lý ba lực cân bằng

“Ba lực cân bằng cùng nằm trong một mặt phẳng, nếu không song song thì đường tác động phải đồng quy tại một điểm”.



H 1-18

\* Chứng minh

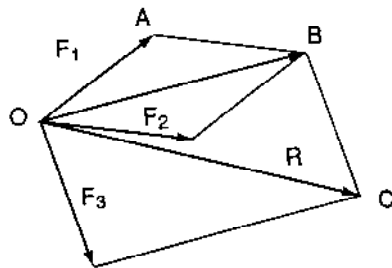
$$\vec{F}_1, \vec{F}_2 \text{ đồng qui nên } (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{R}$$

$$\text{Vì } (\vec{F}, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim 0 \text{ nên } (\vec{R}, \vec{F}_3) \sim 0$$

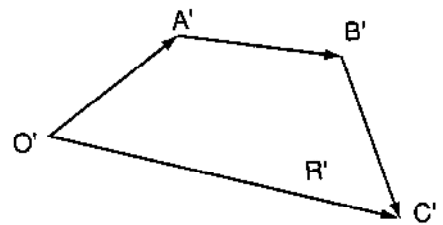
Theo tiên đề 1 thì  $(\vec{R} \text{ \& } \vec{F}_3)$  là hai lực có cùng đường tác động nên chúng đồng qui nhau

#### 4. Hợp các lực đồng qui

Giả sử có hai lực đồng qui tại O (trên cùng hai lực có đường tác động gặp nhau tại O thì áp dụng hai quy tắc đầu tiên và định luật hợp lực tại O). Từ tiên đề 3, ta tìm được hai lực  $\vec{R}$  của hai lực.



H 1-19



H 1-20

Hợp lực đi qua điểm đồng qui O và có vectơ hợp lực

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \quad (1.4)$$

Để xác định vectơ của hai lực, ta có thể sử dụng phương pháp vẽ hoặc phương pháp xác định hình chiếu của nó trên ba trục tạo thành trục vuông góc.

##### a. Phương pháp vẽ

Từ một điểm O' bất kỳ trong mặt phẳng chứa đường tác động của lực, lấy một điểm liên tiếp các vectơ sao cho song song, cùng chiều, cùng trọng số với các lực thành phần. Hợp lực được biểu diễn bằng vectơ khép kín của đa giác lực đồng qui xây dựng bằng các vectơ đã vẽ trên (H4 - 3).

Vectơ khép kín  $\vec{R}'$  của đa giác lực xuất phát từ một điểm O' bất kỳ đồng qui là vectơ chính của hai lực.

$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Từ đó ta có định lý 4.2: Hợp lực của hai lực đồng qui được quy đổi về biểu diễn bằng vectơ chính của hai lực đồng qui tại điểm đồng qui.

##### b. Phương pháp chiếu lực

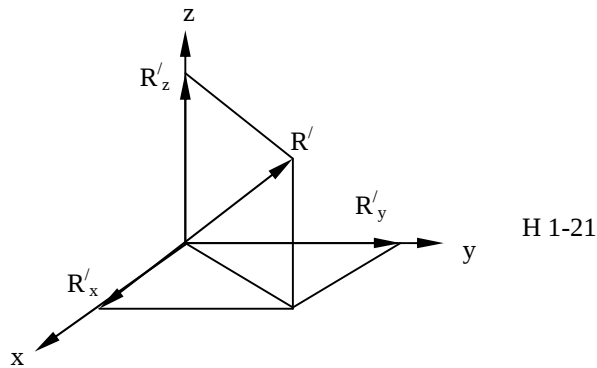
Chiếu 2 vectơ của đường thẳng vectơ  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$  lên 3 trục tạo thành trục vuông góc, ta được:

$$\begin{aligned} R_x &= \overline{F}_{1x} + \overline{F}_{2x} + \dots + \overline{F}_{nx} = \sum_{i=1}^n \overline{F}_{ix} \\ R_y &= \overline{F}_{1y} + \overline{F}_{2y} + \dots + \overline{F}_{ny} = \sum_{i=1}^n \overline{F}_{iy} \\ R_z &= \overline{F}_{1z} + \overline{F}_{2z} + \dots + \overline{F}_{nz} = \sum_{i=1}^n \overline{F}_{iz} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Đó là ba hình chiếu của vectơ hợp lên 3 trục tạo thành vuông góc. Từ đó có thể xác định được trục, phương, chiếu của vectơ hợp:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{R_x}{R} \\ \cos \beta = \frac{R_y}{R} \\ \cos \gamma = \frac{R_z}{R} \end{cases} \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ là các góc hợp bởi } \vec{R} \text{ với các trục } ox, oy, oz) \quad (1.7)$$



## 5. Các định lý biến đổi ngẫu nhiên

Định lý 4.3: Hai ngẫu nhiên cùng nằm trong mặt phẳng, có cùng chiều quay và cùng trục mômen (tức cùng mômen đối xứng) thì tương đương ngẫu nhiên.

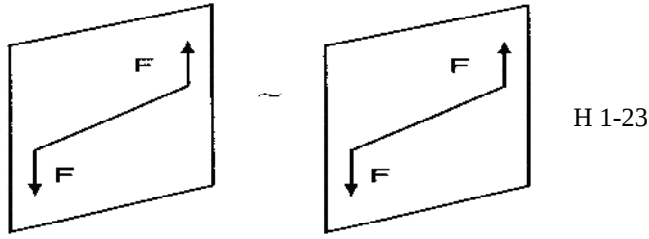


Từ định lý này có thể suy ra hai hệ quả:

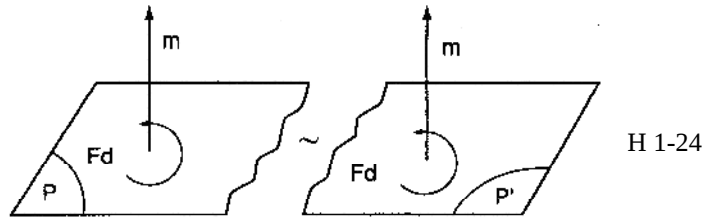
Hệ quả 1: Tác động ngẫu nhiên không thay đổi khi đổi tùy ý nó (giữ nguyên chiều quay và trục mômen) trong mặt phẳng ngẫu nhiên.

Hệ quả 2: Có thể thay đổi tay đòn của ngẫu nhiên mà tác động của nó không thay đổi, nếu giữ nguyên chiều quay và trục mômen.

Định lý 4.4: Tác động ngẫu nhiên không thay đổi khi đổi nó đến những mặt phẳng song song.



Định lý 4.5: Hai hệ lực có cùng vectơ mômen thì tương đương nhau.

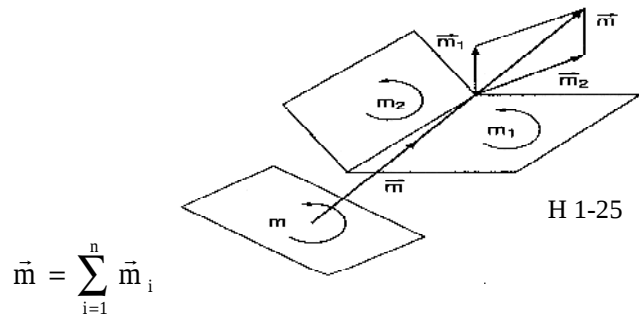


Như vậy, tác động của hệ lực hoàn toàn được đặc trưng bằng vectơ mômen hệ lực  $\vec{m}$ .

Trong trường hợp riêng, khi xét tác động của hệ lực trong mặt phẳng thì tác động của nó hoàn toàn được đặc trưng bằng mômen đối với hệ lực.

$$\vec{m} = \pm Fd$$

Định lý 4.6: Hợp các hệ lực được mặt phẳng có vectơ mômen bằng tổng các vectơ mômen của các hệ lực đã cho.



$$\vec{m} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_i$$

Trường hợp đặc biệt: Hợp các hệ lực nằm trong cùng mặt phẳng, ta được mặt phẳng lực nằm trong mặt phẳng đã cho, có mômen đối với trục bằng tổng các mômen đối với trục của các hệ lực đã cho

$$\vec{m} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_i \quad (1.8)$$

## Bài 2. HẸM LỰC PHẪNG

### I. Vectơ chính và mômen chính của hệ lực phẳng

#### 1. Vectơ chính của hệ lực phẳng

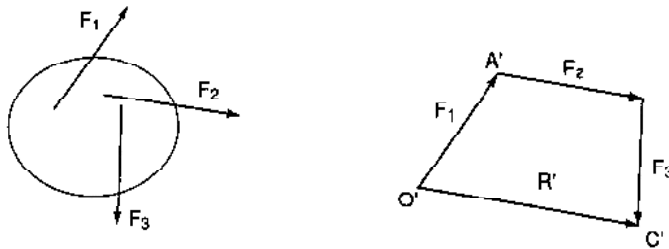
##### a. Định nghĩa

Cho hệ lực phẳng  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  Vectơ chính của hệ lực, ký hiệu  $\vec{R}'$  là vectơ tổng của các vectơ lực của hệ lực.

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.1)$$

##### b. Xác định vectơ chính của hệ lực phẳng

\* Có thể sử dụng phương pháp vẽ đa giác lực (xem bài 4). Trong trường hợp hình này, đa giác lực là đa giác phẳng (H5 – 1)



H2 - 1

\* Cũng có thể xác định vectơ chính qua các hình chiếu của nó trên các trục tọa độ vuông góc theo công thức (4.3). Trong trường hợp hình này, chỉ cần xác định hai hình chiếu của nó trên hai trục vuông góc nhau.

$$\begin{aligned} R'_x &= \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} + \dots + \vec{F}_{nx} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} \\ R'_y &= \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} + \dots + \vec{F}_{ny} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Trị số và phương chiếu của vectơ chính được xác định theo công thức:

$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y}, \quad \cos \alpha = \frac{R'_x}{R'}, \quad \cos \beta = \frac{R'_y}{R'} \quad (2.3)$$

( $\alpha, \beta$  là góc hợp bởi  $\vec{R}'$  và các trục  $Ox, Oy$ )

#### 2. Mômen chính của hệ lực phẳng đối với điểm

##### a. Mômen của một lực đối với điểm

Mômen của một lực đối với điểm  $O$ , ký hiệu  $\vec{m}_0(\vec{F})$  là mômen của lực đối với điểm  $O$ .

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \pm Fd \quad (\text{Nm}) \quad (2.4)$$

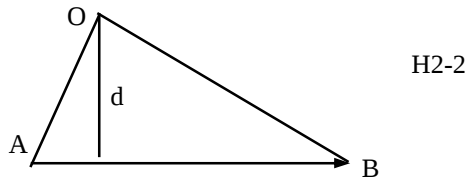
Trong đó:  $F$  là trọng lực của vật,  $d$  là khoảng cách vuông góc từ  $O$  đến đường tác động của lực.

Quy ước:  $\vec{m}_0(\vec{F}) > 0$  khi vật có chiều quay quanh  $O$  ngược chiều kim đồng hồ

$\vec{m}_0(\vec{F}) < 0$  trong trường hợp ngược lại.

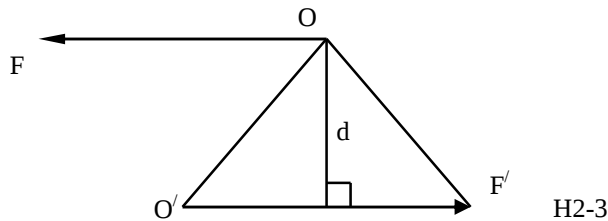
Chú ý: – Mômen của lực đối với điểm bằng 0 khi lực đi qua điểm lấy mômen ( $d = 0$ ). Với trọng lực, mômen của lực đối với điểm bằng hai lần diện tích tam giác có đỉnh là điểm lấy mômen, có đáy là vectơ lực.

$$|\vec{m}_0(\vec{F})| = 2 \text{ dt } \Delta OAB$$



– Mômen của lực bằng mômen của một lực thành phần đối với điểm lấy mômen trên đường tác động của lực thành phần kia.

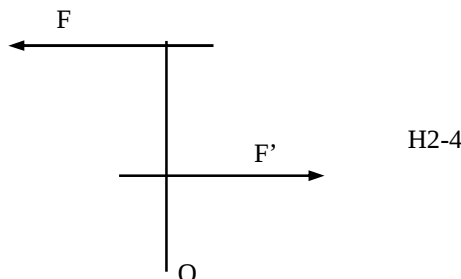
$$\vec{m} = Fd = m_{O'}(\vec{F}) = m_0(\vec{F}') \quad (2.5)$$



(O nằm trên đường tác động của  $\vec{F}$  &  $O'$  nằm trên đường tác động của  $\vec{F}'$ )

– Mômen của lực ( $\vec{F}, \vec{F}'$ ) đối với một điểm  $O$  bất kỳ (tức là tổng mômen của lực  $\vec{F}$  và  $\vec{F}'$  đối với  $O$ ) chính bằng mômen của lực.

$$\vec{m} = \vec{m}_0(\vec{F}) + \vec{m}_0(\vec{F}')$$



b. Mômen chính của hệ lực phẳng đối với một điểm

Mômen chính của hệ lực phẳng đối với điểm  $O$  là đại lượng đại số, ký hiệu  $\vec{m}^o$  bằng tổng mômen của các lực của hệ lực đối với điểm  $O$

$$\vec{m}^o = \vec{m}_0(\vec{F}_1) + \vec{m}_0(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_0(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_i) \quad (2.6)$$

Nhận xét

– Vectơ chính tắc, còn mô men chính phải thuộc vào điểm lấy mô men, nghĩa là mô men chính đối với hai điểm khác nhau sẽ khác nhau.

$$\vec{m}^0 = \vec{m}^{0'} + \vec{m}_{O'}(\vec{R}'_0) \quad (2.7)$$

Trong đó :  $\vec{m}^0$  và  $\vec{m}^{0'}$  là mô men chính của hệ lực đối với điểm 0 và 0' tương ứng  
 $\vec{m}_{O'}(\vec{R}'_0)$  là mô men đối với điểm O' của vectơ chính đặt tại điểm O.

– Đối với hệ lực đồng quy thì mô men chính của hệ lực đối với điểm đồng quy bằng 0.

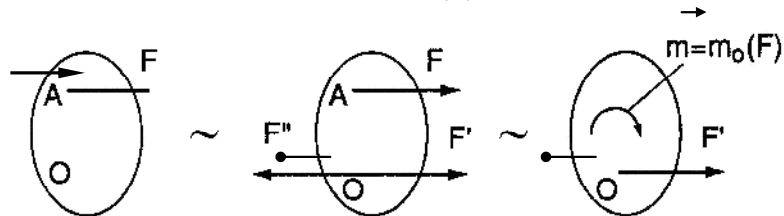
– Đối với hệ ngẫu lực thì vectơ chính của hệ ngẫu lực luôn bằng 0, còn mô men chính của hệ ngẫu lực đối với điểm bất kỳ O nào cũng bằng mô men của ngẫu lực tác dụng (tức là bằng tổng mô men của các ngẫu lực thành phần của hệ ngẫu lực).

## II. Thu gọn hệ lực phẳng

### 1. Định lý dời lực song song

Lực  $\vec{F}$  đặt tại A tác dụng đồng quy với tác dụng của lực  $\vec{F}'$  đặt tại O và mô men ngẫu lực có mô men bằng mô men của lực  $\vec{F}$  đối với điểm O.

$$\vec{F} \sim [\vec{F}' \text{ \& } \vec{m} = \vec{m}_O(\vec{F})] \quad (2.8)$$



H 2 - 5

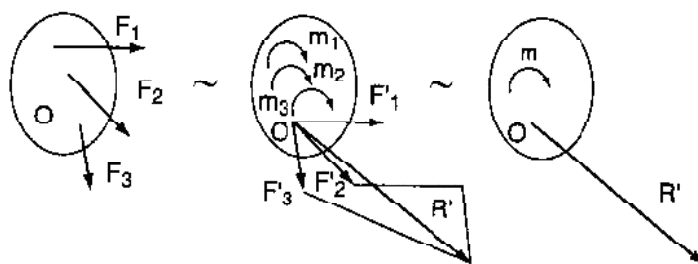
Chứng minh: Xét tại O hai lực cân bằng  $(\vec{F}', \vec{F}'')$  có cùng trục với lực  $\vec{F}$ .

Theo tiên đề 2, ta có  $\vec{F} \sim (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'') \sim [\vec{F}' \text{ và } (\vec{F}, \vec{F}'')]$

$(\vec{F}, \vec{F}'')$  là mô men ngẫu lực có mô men  $\vec{m} = \vec{m}_O(\vec{F})$  (Theo công thức 2.5)

### 2. Thu gọn hệ ngẫu lực phẳng về một tâm

Lấy một điểm O trong mặt phẳng tác dụng của hệ lực gọi là tâm thu gọn. Áp dụng định lý dời lực song song dời các lực về tâm O.



H2 - 6

$$\vec{F}_1 \sim \vec{F}_1' \text{ và } \text{ngẫu nhiên } \vec{m}_1 = \vec{m}_0(\vec{F}_1)$$

$$\vec{F}_2 \sim \vec{F}_2' \text{ và } \text{ngẫu nhiên } \vec{m}_2 = \vec{m}_0(\vec{F}_2)$$

.....

$$\vec{F}_n \sim \vec{F}_n' \text{ và } \text{ngẫu nhiên } \vec{m}_n = \vec{m}_0(\vec{F}_n)$$

Như vậy: Thu gọn hệ lực  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  về tâm O, ta được hệ lực  $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', \dots, \vec{F}_n')$  đồng quy tại O và hệ ngẫu nhiên lực phản  $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n)$

\* Theo kết quả bài 1, hệ lực đồng quy đó có hợp lực đi qua O, được biểu diễn bằng vectơ chính của hệ lực đã cho đặt tại O (vectơ chính của hệ lực đồng quy thu về O và vectơ chính của hệ lực đã cho bằng nhau).

$$\vec{R}_0' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{R}' \quad (2.9)$$

Trong đó:  $\vec{R}_0'$  là hợp lực của hệ lực đồng quy thu về O

$\vec{R}'$  là vectơ chính của hệ lực phản đã cho.

\* Hệ ngẫu nhiên lực phản  $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n)$  tổng đồng quy với moment ngẫu nhiên  $\vec{m}$  nằm trong mặt phẳng của hệ lực.

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_n = \vec{m}_0(\vec{F}_1) + \vec{m}_0(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_0(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_i) = \vec{m}^0$$

(2.10)

Ta có định lý:

**Định lý (2.2):** Hệ lực phản bất kỳ tổng đồng quy với moment lực và moment ngẫu nhiên đặt tại một điểm tùy ý cùng nằm trong mặt phẳng tác động của hệ lực. Chúng được gọi là lực và ngẫu nhiên thu gọn. Lực thu gọn đặt tại tâm thu gọn, có vectơ chính bằng vectơ chính của hệ lực còn ngẫu nhiên lực thu gọn có mômen bằng mômen chính của hệ lực đặt về tâm thu gọn.

Chú ý: – Phản ứng, chiều và trọng lực thu gọn không phụ thuộc vào tâm thu gọn vì vectơ chính là vectơ tự do.

– Ngẫu nhiên lực thu gọn phụ thuộc vào tâm thu gọn vì nó được tính theo công thức (2.10) khi tâm thu gọn thay đổi.

### 3. Các dạng chuẩn của hệ lực phản

Theo kết quả thu gọn hệ lực phản về một tâm, ta nhận được các dạng chuẩn sau:

a. Hệ lực phản cân bằng khi vectơ chính và mômen chính đặt về một điểm bất kỳ triệt tiêu:

$$\vec{R}' = 0, \vec{m}^0 = 0 \rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0$$

b. Hệ lực phản tổng đồng quy với moment ngẫu nhiên lực khi vectơ chính triệt tiêu và mômen chính đặt về một điểm bất kỳ không triệt tiêu.

$$\vec{R}' = 0, \quad \vec{m}^o \neq 0 \rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{m}^o$$

Trong hai trường hợp trên, vì  $\vec{R}' = 0$  nên mômen chính đối với mọi tâm đều bằng nhau. Trong trường hợp (a) bằng 0 đối với mọi tâm, còn trong trường hợp (b) bằng  $\vec{m}^o$  đối với mọi tâm.

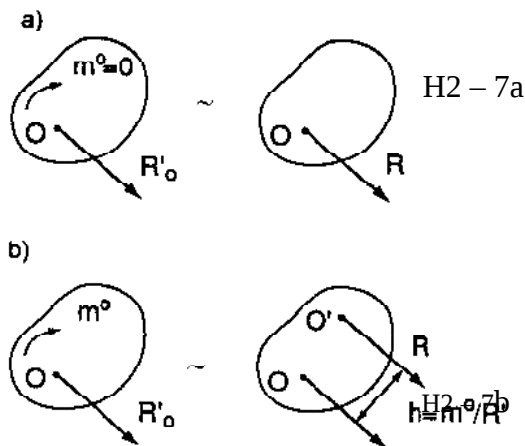
c. Hệ lực phẳng có hợp lực

$$* \text{ Khi } \vec{R}' \neq 0, \quad \vec{m}^o = 0 \rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}'_0$$

$$* \text{ Khi } \vec{R}' \neq 0, \quad \vec{m}^o \neq 0:$$

Hệ lực thu về tâm O để tìm vectơ  $\vec{R}_0$  và mômen tương đương  $\vec{m}^o$ . Theo định lý dời trục song song, có thể đưa vectơ  $\vec{R}_0$  có phương chiều và trục song song phương chiều và trục của vectơ chính bằng dời tới điểm O' khác O cách O một khoảng  $h = \frac{m^o}{R'}$ , sao cho mômen của hệ lực  $\vec{R}$  đối với điểm O bằng  $\vec{m}^o$ ,

$$\text{tức là: } \vec{m}_o(\vec{R}) = \vec{m}^o = \sum_{i=1}^n \vec{m}_o(\vec{F}_i)$$



#### 4. Định lý Varignon

Trong trường hợp hệ lực có hợp lực, mômen của hệ lực đối với một điểm bất kỳ bằng tổng mômen của các lực của hệ lực đối với cùng điểm đó.

$$\vec{m}_o(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_o(\vec{F}_i) \quad (2.11)$$

Từ đó dễ dàng suy ra:

- Hệ lực phẳng đồng qui có hai tính chất sau:
  - \* Cân bằng nếu vectơ chính của hệ lực triệt tiêu.
  - \* Hệ lực cân bằng vectơ chính của hệ lực không triệt tiêu.
- Hệ ngẫu lực có hai tính chất sau:
  - \* Cân bằng nếu mômen chính của ngẫu lực triệt tiêu.
  - \* Ngẫu lực cân bằng mômen chính của ngẫu lực không triệt tiêu.

- Hai lực phẳng song song cùng chiều có moment động chuẩn là hợp lực vì vectơ chính của hai lực không triệt tiêu.

- Hai lực phẳng song song ngược chiều có thể có ba động chuẩn: Cân bằng, ngược lực và hợp lực.

### III. Điều kiện cân bằng và các phương trình cân bằng của hai lực phẳng

#### 1. Điều kiện cân bằng

Định lý 2.4: Điều kiện cần và đủ để hai lực phẳng cân bằng là vectơ chính và mômen chính của hai lực đối với một điểm bất kỳ phải đồng thời triệt tiêu.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \\ \overline{m^0} = \sum_{i=1}^n \overline{m_0}(\vec{F}_i) = 0 \end{array} \right\} \quad (2.12)$$

Chứng minh: – Điều kiện cần để chứng minh đưa vào các động chuẩn của hai lực, vì nếu điều kiện (2.12) không thỏa mãn thì hai lực phẳng hợp tác đồng thời với một lực hoặc một ngẫu lực, chúng đều không thỏa mãn tiên đề 1.

– Điều kiện đủ là hiển nhiên vì khi vectơ chính bằng 0, hai lực thu gọn về tâm O sẽ được một ngẫu lực, tức là thu gọn về hai lực. Nếu ngẫu lực bằng 0 thì hai lực đó là hai lực cân bằng.

#### 2. Các động phương trình cân bằng của hai lực phẳng

Điều kiện (2.12) có thể viết dưới dạng các phương trình đồng thức là phương trình cân bằng. Có 3 động phương trình cân bằng:

– Động 1: Điều kiện cần và đủ để hai lực cân bằng là tổng hình chiếu các lực lên hai trục tọa độ vuông góc và tổng mômen các lực đối với một điểm bất kỳ đồng thời triệt tiêu.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \bar{F}_{ix} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \bar{F}_{iy} &= 0 \\ \sum \bar{m}_0(\vec{F}_i) &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

– Động 2: Điều kiện cần và đủ để hai lực phẳng cân bằng là tổng hình chiếu của các lực lên một trục và tổng mômen các lực đối với hai điểm A & B tùy ý triệt tiêu, với điều kiện AB không vuông góc với trục chiếu.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \bar{F}_{ix} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \bar{m}_A(\vec{F}_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \bar{m}_B(\vec{F}_i) &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

– **Điều 3:** Điều kiện cân và để hệ là cân bằng là tổng mômen của các lực đối với 3 điểm A, B, C không bằng 0.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \vec{m}_A(\vec{F}_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \vec{m}_B(\vec{F}_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \vec{m}_C(\vec{F}_i) &= 0\end{aligned}\quad (2.15)$$

### 3. Điều kiện cân bằng của vật rắn không biến dạng

Trường hợp vật rắn không biến dạng, ngoài các lực chủ động tác động lên vật rắn còn có các phản lực liên kết. Gọi phóng các liên kết, ta có vật thể cân bằng chịu tác động của hệ gồm có các lực tác động và các phản lực liên kết.

## IV. Các bài toán về cân bằng

### 1. Bài toán cân bằng hệ vật

Trong thực tế ta thường gặp kết cấu gồm nhiều vật liên kết với nhau và cùng cân bằng, đó là hệ vật cân bằng.

Có hai phương pháp giải bài toán hệ vật cân bằng:

#### a. Phương pháp tách vật

- Chọn mỗi vật rắn làm vật khảo sát bằng cách vẽ riêng từng vật rắn.
- Xác định hệ lực tác động lên mỗi vật đó sau khi gọi phóng liên kết.
- Lập và giải các phương trình cân bằng cho mỗi vật.

**Chú ý:** Mỗi vật cân bằng dưới tác động của hệ lực phải nên có thể viết được nhiều nhất là 3 phương trình cân bằng để lập. Nếu hệ có n vật rắn thì có tối đa 3n phương trình cân bằng để lập.

- Nhận định kết quả và biện luận.

#### b. Phương pháp hệ nối tiếp

Từng từng nhấc trên gồm 4 bước. Đầu tiên ta hoá rắn các hệ và viết được 3 phương trình cân bằng, sau đó tách ra khỏi hệ (n - 1) vật và lập được 3(n - 1) phương trình cân bằng tiếp theo.

Với phương trình này nếu hệ có n vật rắn thì số phương trình cân bằng tối đa là: 3 + 3(n - 1) = 3n.

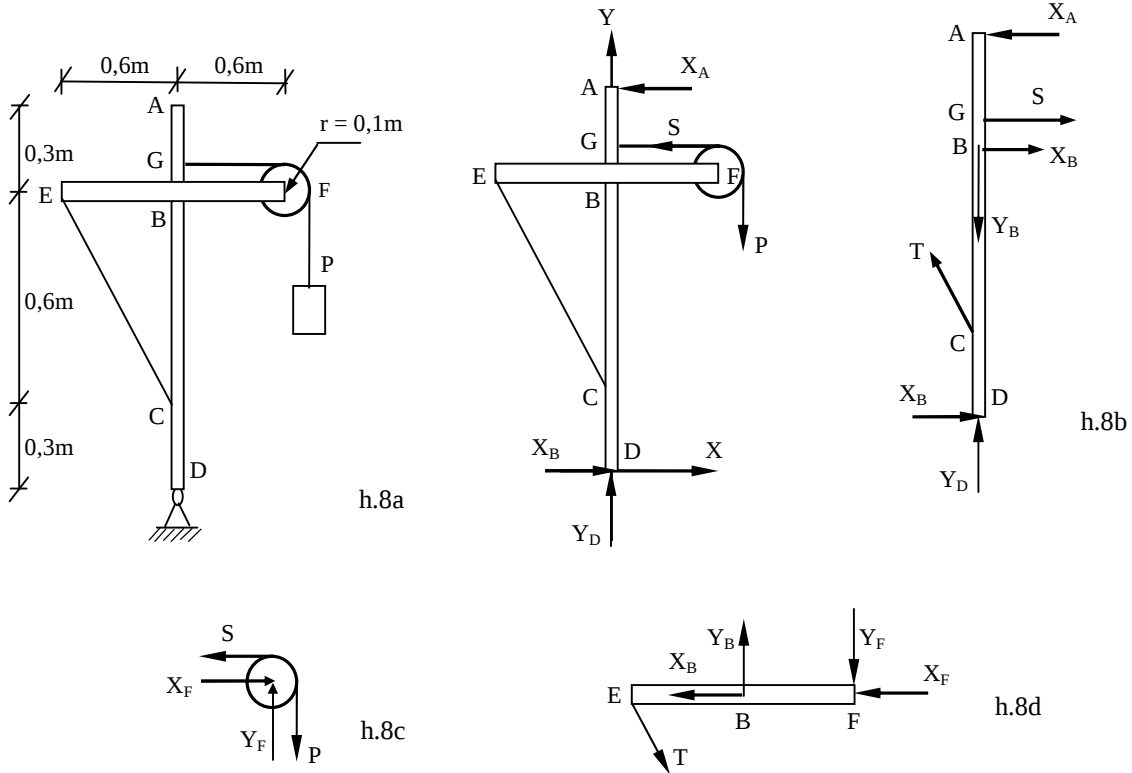
**Ví dụ:** Một kết cấu treo vật nặng P = 1680N bằng sợi dây vật qua ròng rọc F và buộc vào chốt AB tại G. Thanh EBF gồm chốt tại B và đầu cố định ngang bằng sợi dây EC như (H8.1a). Xác định lực căng T của dây EC và phản lực tại A, B, D. Bỏ qua trọng lượng của các thanh, dây, ròng rọc và ma sát của ròng rọc.

**Giải**

Sử dụng phương pháp hệ nối tiếp.

\* Chọn vật khảo sát:

- Hòm vòm (H8.1b).
- Ròng rọc tời F (H8.1c).
- Thanh EBF (H8.1d).



\* Xác định hòm lồng cạp tác động lên mòm i vòm.

Sau khi GPLK: Hòm vòm cân bằng dòm i tác động cạp các lồng ( $\vec{X}_A, \vec{X}_D, \vec{Y}_D, \vec{P}$ )

Ròng rọc tời F cân bằng dòm i tác động cạp các lồng ( $\vec{S}, \vec{P}, \vec{X}_F, \vec{Y}_F$ )

Thanh EBF cân bằng dòm i tác động cạp các lồng ( $\vec{T}, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{X}_F, \vec{Y}_F$ )

- Lập phương trình cân bằng cho mòm i vòm

Đúng 1 cho hòm vòm :

$$\sum X = -X_A + X_D = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = Y_D - P = 0 \quad (2)$$

$$\sum \bar{m}_D = 1,4X_A - 0,6P = 0 \quad (3)$$

$$(3) \rightarrow X_A = \frac{0,6P}{1,4} = 720\text{N}$$

$$(1) \rightarrow X_D = X_A = 720\text{N}$$

$$(2) \rightarrow Y_D = P = 1680\text{N}$$

Định 1 cho ròng rọc F

$$\sum X = X_F - S = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y = Y_F - P = 0 \quad (5)$$

$$\sum \bar{m}_F = rS - rP = 0 \quad (6)$$

$$(6) \rightarrow S = P = 1680N$$

$$(4), (5) \rightarrow X_F = Y_F = P = 1680N$$

Định 2 cho thanh EPF

$$\sum X = T \cos \alpha - X_B - X_F = 0 \quad (7)$$

$$\sum \bar{m}_E = 0,6Y_B - 1,1Y_F = 0 \quad (8)$$

$$\sum \bar{m}_B = 0,6T \sin \alpha - 0,5Y_F = 0 \quad (9)$$

$$(9) \rightarrow T = \frac{0,5Y_F}{0,6 \sin \alpha} = 1750N$$

$$(8) \rightarrow Y_B = \frac{1,1Y_F}{0,6} = 3080N$$

$$(7) \rightarrow X_B = T \cos \alpha - X_F = -630N$$

Vậy  $X_B$  ngược chiều đã chọn

## 2. Ma sát

a. Phấn liên kết tại các mặt tiếp xúc

Trong thực tế, tại chỗ tiếp xúc giữa hai vật không phải là tiếp xúc điểm mà tiếp xúc theo đường hay mặt. Phấn liên kết xuất hiện tại chỗ tiếp xúc là mặt tiếp xúc. Thu hút này vì tâm thu hút, ta định nghĩa phấn liên kết  $\vec{R}$  và moment ngưu liên kết  $\vec{M}$  cùng nằm trong mặt phẳng tiếp xúc.

Phấn liên kết có thể phân ra:

$$\begin{aligned} \vec{R} \left\{ \begin{array}{l} \vec{N}: \text{Có phương pháp tuyến với mặt tiếp xúc} \\ \vec{T}: \text{Có phương tiếp tuyến với mặt tiếp xúc} \end{array} \right. \\ \vec{M} \left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_x: \text{Nằm trong mặt phẳng tiếp tuyến} \\ \vec{M}_1: \text{Nằm trong mặt phẳng vuông góc với phương tiếp tuyến.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Khi hai vật tiếp xúc dịch chuyển hay có khuynh hướng dịch chuyển thì ng dđi với nhau. Các liên kết trên có tác động cản trở nhđng dịch chuyển.

$$\vec{T}: \text{Cản trượt}$$

$$\vec{M}_1: \text{Cản lăn}$$

$$\vec{M}_x: \text{Cản xoay}$$

b. Các lực ma sát

\* Định nghĩa: Các phân lực liên kết của mặt tiếp xúc gây nên chuyển động hay xu hướng chuyển động của vật tiếp xúc trên nó được gọi là:

$\vec{T}$  : Lực ma sát trượt

$\vec{M}_l$  : Ngẫu lực ma sát lăn

$\vec{M}_x$  : Ngẫu lực ma sát xoay

\* Tính chất

- Chúng đều có hướng chuyển động hoặc xu hướng chuyển động
- Chúng xuất hiện khi tiếp xúc trượt, lăn, xoay.
- Trượt :  $0 \leq T \leq fN$

$$0 \leq M_l \leq f_l N$$

$$0 \leq M_x \leq f_x N$$

Trong đó:  $f$  : Là hệ số ma sát trượt

$f_l$  : Là hệ số ma sát lăn (m)

$f_x$  : Là hệ số ma sát xoay (m)

- Khi ở trạng thái tĩnh thì  $\vec{T}$ ,  $\vec{M}_l$ ,  $\vec{M}_x$  có trị số luôn bằng 0, mômen 0 tác động lên vật gây xu hướng trượt, lăn, xoay.
- Khi lực và mômen tác động có trị số bằng các trị số cực đại của chúng:

$$T_{\max} = fN$$

$$M_{l\max} = f_l N$$

$$M_{x\max} = f_x N \text{ thì vật bắt đầu trượt, lăn hoặc xoay}$$

- Các hệ số  $f$ ,  $f_l$ ,  $f_x$  chỉ phụ thuộc vào tính chất của mặt tiếp xúc, không phụ thuộc vào diện tích tiếp xúc.
- Hệ số ma sát động nhỏ hơn hệ số ma sát tĩnh.

c. Điều kiện cân bằng khi có ma sát

\* Điều kiện cân bằng tổng quát – Miền cân bằng.

Ngoài các phương trình cân bằng chung, khi có ma sát còn phải thêm các phương trình và bất phương trình:

Hình chiếu các lực lên phương trình trượt:

$$\sum x \leq fN$$

Mômen của các lực gây lăn :

$$\sum \bar{m}_l(\vec{F}_i) \leq f_l N$$

Mômen của các lực gây xoay :

$$\sum \bar{m}_x(\vec{F}_i) \leq f_x N$$

Do có bất phương trình nên bài toán ma sát có tập hợp nghiệm làm thành miền cân bằng. Ngoài ra trong các bài toán ma sát còn có thể đưa ra các điều kiện:

- Lăn không trượt:  $\sum x \leq fN$   
 $\sum m_l(\vec{F}_i) \geq f_l N$
- Không lăn, không trượt:  $\sum x \leq fN$   
 $\sum m_l(\vec{F}_i) \leq f_l N$
- Không lăn, không xoay, không trượt:  $\sum x \leq fN$   
 $\sum m_l(\vec{F}_i) \leq f_l N$   
 $\sum m_x(\vec{F}_i) \leq f_x N$
- Vừa lăn, vừa xoay, vừa trượt:  $\sum x \geq fN$   
 $\sum m_l(\vec{F}_i) \geq f_l N$   
 $\sum m_x(\vec{F}_i) \geq f_x N$

d. Phân tích toàn phần, góc ma sát, nón ma sát

Xét trường hợp hợp ma sát trượt, phân tích liên kết toàn phần trong trường hợp này là:

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

$$N = R \cdot \cos$$

$$T = R \cdot \sin$$

$$T \leq f N$$

$$\text{nên } T \leq f R \cos$$

$$\text{hay } R \sin \leq f R \cos \rightarrow \tan \leq f$$

Trường hợp hợp  $T_{\max}$  thì  $R_{\max}$  và trường hợp  $\tan \leq f$  ( $\varphi$ : góc ma sát). Khi không trượt thì  $T < fN$ , suy ra  $\vec{R}$  nằm trong góc  $\varphi$ . Xu hướng trượt có thể diễn ra theo mọi phía, do đó hình nón trường hợp góc  $\varphi$  đặc biệt gọi là nón ma sát và điều kiện không trượt có thể nêu: “phân tích toàn phần  $\vec{R}$  phải nằm trong nón ma sát”.

**Ví dụ:** Xác định góc nghiêng để khối trụ có bán kính  $R$  đặt trên mặt phẳng nghiêng cân bằng. Cho hệ số ma sát trượt giữa khối trụ với mặt nghiêng  $OA$  là  $f$  và hệ số ma sát lăn là  $\mu$ .

## Giải

Khảo sát khối i trên O cân bằng

Hệ lực tác động:  $(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}, M_1) \sim 0$

Hệ phương trình cân bằng:

$$\sum X = P \sin \alpha - F_{ms} = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = -P \cos \alpha + N = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A = -PR \sin \alpha + M_1 = 0 \quad (3)$$

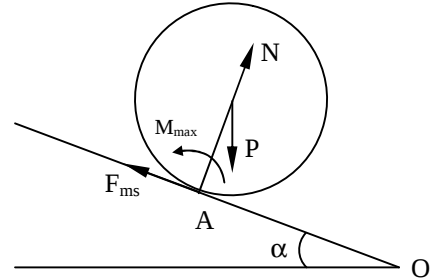
Với  $F_{ms} \leq f N$

$$M_1 \leq \mu N$$

$$(2) \rightarrow N = P \cos \alpha$$

$$(1) \rightarrow P \sin \alpha - f P \cos \alpha = 0 \rightarrow \tan \alpha = f$$

$$(3) \rightarrow PR \sin \alpha - \mu P \cos \alpha = 0 \rightarrow \tan \alpha = \frac{\mu}{R}$$



H2 - 8

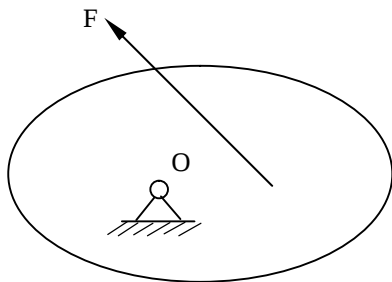
Thì ng thì  $\frac{\mu}{R}$  rít nh so v i f nên đi u ki n đ cân b ng:  $\tan \alpha \leq \frac{\mu}{R}$ . Nếu tăng dần thì v t s l n ( $\tan \alpha \leq f$ ),

Khi  $\tan \alpha > f$  v t v a l n v a t r t,

### 3. Cân bằng đòn phng và v t l t

#### a. Đòn phng

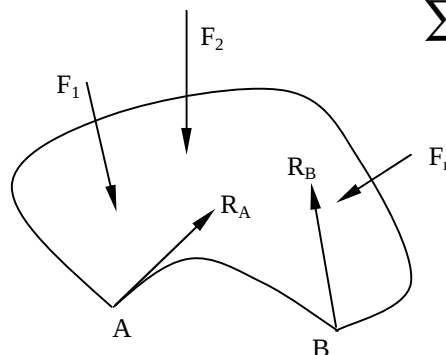
Đòn phng là v t r n quay đ i c quanh m t tr c c đ nh, các l c tác đ ng lên v t r n đ u n m trong m t ph ng vu g c v i tr c này. Giao đ i m c a tr c này và m t ph ng ch a l c tác đ ng đ i c g i là đ i m t a c a đòn.



Ta có đi u ki n c n và đ đ đòn ph ng cân b ng là: "T ng m o m c a c a các l c tác đ ng lên đ i m t a c a đòn ph ng b ng không"

$$\sum \vec{m}_0(\vec{F}_i) = 0$$

#### b. V t r n l t đ i c



Giả sử vật rắn chịu tác động của hệ lực  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  và các liên kết tại A & B là  $\vec{R}_A$  &  $\vec{R}_B$ .

$$\text{Vật rắn cân bằng nếu } (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{R}_A, \vec{R}_B) \sim 0.$$

Nếu hệ lực chỉ tác động lên vật rắn dãn trên mặt liên kết thì còn lại mặt liên kết

$$R_A \neq 0 \quad ; \quad R_B = 0$$

$$\text{hoặc } R_B \neq 0 \quad ; \quad R_A = 0$$

Khi đó vật rắn có thể quay quanh A hoặc B. Hay ta nói: vật có thể lật quanh A hoặc B.

Ta có điều kiện cân bằng của vật rắn như sau:

$$\text{Không lật quanh A: } \sum \bar{m}_A(\vec{F}_i) = 0$$

$$\text{Không lật quanh B: } \sum \bar{m}_B(\vec{F}_i) = 0$$

Trong thực tế, người ta căn cứ vào xu hướng lật của vật rắn và phân loại các hệ lực thành hệ lực gây và hệ lực lật, mômen tipping ngược của chúng là mômen gây và mômen lật.

Điều kiện cân bằng của vật rắn lật được là:

$$M_{\text{giö}} > M_{\text{lät}} \text{ hay } K = \frac{M_{\text{giö}}}{M_{\text{lät}}} > 1$$

K : Hệ số ổn định chống lật

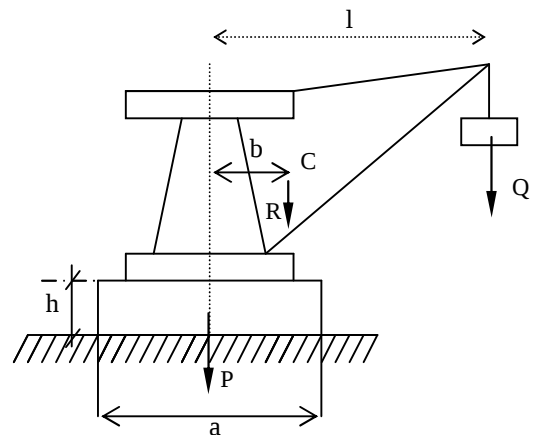
**Ví dụ :** Cần trục được gắn chặt vào móng bằng đá. Trọng lượng cần trục  $R = 40$  KN và đặt ở C cách trục cần trục 1 đơn vị  $b = 0,75$  m. Cần trục nâng tải trọng  $Q = 25$  KN cách trục mặt đất đơn vị  $l = 4$  m. Móng đá có diện tích đáy là hình vuông cạnh  $a = 2$  m, trọng lượng riêng đáy móng  $\gamma = 20$  KN/m<sup>3</sup>. Xác định chiều cao  $h$  của móng để hệ số ổn định  $k = 2$ .

**Giải**

$$\text{Hệ số ổn định } k = 2 = \frac{M_{\hat{o}}}{M_{\text{lät}}}$$

$$\begin{aligned} \text{Trong đó } M_{\hat{o}} &= R \left( \frac{a}{2} - b \right) + P \cdot \frac{a}{2} \\ &= Ra + Pa - 2Rb \end{aligned}$$

$$M_l = Q \left( l - \frac{a}{2} \right) = 2Ql - Qa$$



$$\Rightarrow \frac{Ra + Pa - 2Rb}{2Ql - Qa} = 2$$

mà  $P = \gamma a^2 h$

$$\Rightarrow h = \frac{2(2Ql - Qa) - Ra + 2Rb}{a \cdot \gamma}$$

$$h = \frac{2(2 \cdot 25 \cdot 4 - 25 \cdot 2) - 40 \cdot 2 + 2 \cdot 40 \cdot 0,75}{2 \cdot 20 \cdot 4}$$

$$h = 1,75 \text{ m}$$

### BÀI 3. HẸP LỰC KHÔNG GIAN

#### I. Vectơ chính và mômen chính của hệ lực không gian

##### 1. Vectơ chính của hệ lực không gian

Cho hệ lực không gian  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$

- a. Định nghĩa: Vectơ chính của hệ lực, ký hiệu  $\vec{R}'$ , là vectơ tổng của các vectơ lực của hệ lực:

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (3.1)$$

- b. Xác định vectơ chính: Có thể dùng phương pháp vẽ đa giác lực. Trong trường hợp này đa giác lực là đa giác khép kín.

Cũng có thể xác định vectơ chính qua các hình chiếu của nó trên ba trục tọa độ vuông góc theo các công thức sau:

$$\left. \begin{aligned} R'_x &= \bar{F}_{1x} + \bar{F}_{2x} + \dots + \bar{F}_{ix} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{ix} \\ R'_y &= \bar{F}_{1y} + \bar{F}_{2y} + \dots + \bar{F}_{iy} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{iy} \\ R'_z &= \bar{F}_{1z} + \bar{F}_{2z} + \dots + \bar{F}_{iz} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{iz} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$R' = \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}; \quad \cos \alpha = \frac{R'_x}{R'};$$

$$\cos \beta = \frac{R'_y}{R'}; \quad \cos \gamma = \frac{R'_z}{R'};$$

Trong đó  $\alpha, \beta, \gamma$  là góc hợp bởi  $\vec{R}'$  và các trục  $Ox, Oy, Oz$

##### 2. Mômen chính của hệ lực không gian đối với trục bất kỳ

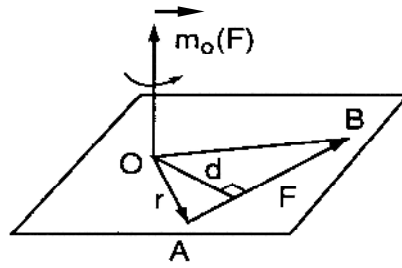
- a. Mômen của một lực đối với trục bất kỳ: Mômen của lực  $\vec{F}$  đối với trục đi qua  $O$ , ký hiệu  $\bar{m}_O(\vec{F})$  là vectơ có:

Phương vuông góc với mặt phẳng qua  $O$  và chứa  $\vec{F}$ .

Chiều: Nhìn từ đầu mút xu hướng theo  $\vec{F}$  quay ngược chiều kim đồng hồ quanh  $O$ .

Trường hợp tích số của giá trị lực với cánh tay đòn của lực đối với trục  $O$ ,  $\bar{m}_O(\vec{F}) = Fd$

Đơn vị: Nm



H3 - 1

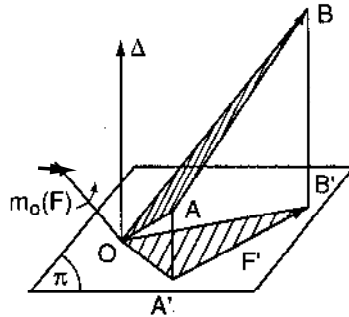
Dễ dàng thấy rằng vectơ mômen của lực đối với một điểm không thay đổi khi lực trượt trên đường tác động của nó và trị tuyệt đối của nó bằng tích tam giác  $\Delta OAB$  ( $A$  là điểm đặt của lực,  $B$  là điểm mút của vectơ lực)

Từ đó suy ra: Vectơ mômen của lực  $\vec{F}$  đối với điểm  $O$  bằng tích có hướng của vectơ định vị điểm đặt lực  $\vec{r} = \vec{OA}$  với vectơ lực  $\vec{F}$ :

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (3.3)$$

b. Mômen của một lực đối với một trục: Mômen của lực  $\vec{F}$  đối với trục  $\Delta$ , ký hiệu  $\vec{m}_\Delta(\vec{F})$  là mômen của lực  $\vec{F}$  đối với điểm  $O$ , mà đó  $\vec{F}'$  là hình chiếu của lực  $\vec{F}$  trên mặt phẳng  $\pi$  vuông góc với trục  $\Delta$ , còn  $O$  là giao điểm của trục  $\Delta$  với mặt phẳng  $\pi$  (hình 9.2):

$$\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = \vec{m}_o(\vec{F}') = F'd \quad (3.4)$$



H3 - 2

Rõ ràng khi  $F = 0$  hoặc khi  $\vec{F}$  song song hay cắt trục  $\Delta$  (lực và trục đồng phẳng) thì  $\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = 0$ .

c. Định lý liên hệ giữa mômen của lực đối với một điểm và mômen của lực đối với một trục (định lý 3-1)

Định lý 3-1: Mômen của lực  $\vec{F}$  đối với trục  $\Delta$  bằng hình chiếu trên trục  $\Delta$  của vectơ mômen của lực  $\vec{F}$  đối với điểm  $O$  nằm trên trục.

$$\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = h_{\Delta}[\vec{m}_o(\vec{F})] \quad (3.5)$$

Áp dụng công thức (3.5) cho trường hợp trục  $\Delta$  lần lượt là trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  mômen của lực  $\vec{F}$  đối với ba trục là  $\vec{m}_x(\vec{F})$ ,  $\vec{m}_y(\vec{F})$ ,  $\vec{m}_z(\vec{F})$ , còn hình chiếu mômen của lực  $\vec{F}$  đối với điểm  $O$  trên ba trục là  $\vec{m}_{Ox}(\vec{F})$ ,  $\vec{m}_{Oy}(\vec{F})$ ,  $\vec{m}_{Oz}(\vec{F})$  ta có :

$$\vec{m}_O(\vec{F}) \begin{cases} \vec{m}_{Ox}(\vec{F}) = \vec{m}_x(\vec{F}) \\ \vec{m}_{Oy}(\vec{F}) = \vec{m}_y(\vec{F}) \\ \vec{m}_{Oz}(\vec{F}) = \vec{m}_z(\vec{F}) \end{cases} \quad (3.6)$$

Vậy có thể thay thế vị trí tính hình chiếu trên mặt trục của vectơ mômen của trục  $\vec{F}$  đi vào mặt điếm O bằng tính mômen của trục  $\vec{F}$  đi vào trục đó.

d. Mômen chính của hệ trục không gian đi vào điếm O

Vectơ mômen chính của hệ trục không gian đi vào điếm O, ký hiệu  $\vec{m}^O$ , là mặt vectơ bằng tổng hình học các vectơ mômen của các trục đi vào điếm O.

$$\vec{m}^O = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_O(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i) \quad (3.7)$$

Vectơ mômen chính có thể dùng để xác định bằng phương pháp đa giác vectơ (tổng đa giác trục, đó vectơ trục để thay thế bằng các vectơ mômen của trục), nhờ thuận tiện hơn, ta xác định các hình chiếu của nó trên các trục để theo (3.6)

$$\vec{m}^O = \begin{cases} \vec{m}^{Ox} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_{Ox}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_x(\vec{F}_i) \\ \vec{m}^{Oy} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_{Oy}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_y(\vec{F}_i) \\ \vec{m}^{Oz} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_{Oz}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_z(\vec{F}_i) \end{cases} \quad (3.8)$$

Từ đó dễ dàng xác định giá trị và phương chiếu của vectơ mômen chính

Nhận xét:

- o Mômen chính của hệ trục đồng quy đi vào điếm đồng quy bằng không.
  - Mômen chính của hệ trục đi vào bất kỳ điếm nào cũng bằng vectơ trục trục:

$$\vec{m}^O = \sum_{i=1}^n \vec{m}_i \quad (3.9)$$

- Vectơ chính là vectơ tự do, còn vectơ mômen chính thay đổi theo điếm lấy mômen:

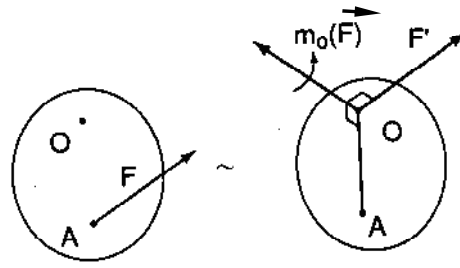
$$\vec{m}^{O_1} = \vec{m}^O + \vec{m}_{O_1}(\vec{R}_O) \quad (3.10)$$

## II. Thu gộp hệ trục không gian

### 1. Định lý trục song song

Trục  $\vec{F}$  đặt tại A tác động vào trục  $\vec{F}'$  tại O (trục  $\vec{F}'$ ) và mặt trục trục có vectơ mômen bằng vectơ mômen của trục  $\vec{F}$  đi vào điếm O (hình 3 – 3)

$$\vec{F} \sim [\vec{F}' \text{ và } \vec{m} = \vec{m}_{O_1}(\vec{F})] \quad (3.11)$$



H3 – 3

Chúng minh định lý này giống như chúng minh cho trường hợp hợp lực song song, khi thay thế mô men đối với cùng vectơ mô men.

## 2. Thu gọn hệ lực không gian về tâm O

Lấy một điểm O tùy ý, gọi là tâm thu gọn. Số định lý dưới đây song song đối với các lực về tâm O (3.12)

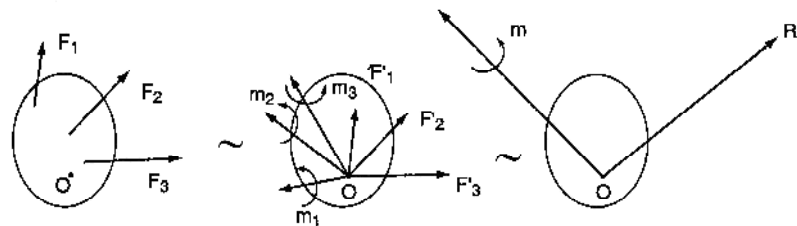
$$\vec{F}_1 \sim [\vec{F}'_1 \text{ và } \vec{m}_1 = \vec{m}_O(\vec{F}_1)]$$

$$\vec{F}_2 \sim [\vec{F}'_2 \text{ và } \vec{m}_2 = \vec{m}_O(\vec{F}_2)]$$

.....

$$\vec{F}_n \sim [\vec{F}'_n \text{ và } \vec{m}_n = \vec{m}_O(\vec{F}_n)]$$

Như vậy thu gọn hệ lực  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  về tâm O, ta được một hệ lực đồng quy (không gian) tại O:  $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n)$  và một hệ ngẫu lực (không gian):  $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n)$



H3 – 4

Hệ lực đồng quy có hợp lực qua O, ký hiệu  $\vec{R}'_O$  được biểu diễn bằng vectơ chính của hệ lực đã cho đặt tại O (vectơ chính của hệ lực đồng quy tại O và vectơ chính của hệ lực đã cho bằng nhau).

$$\vec{R}'_O \equiv \sum_{i=1}^n \vec{F}'_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{R}' \quad (3.13)$$

trong đó  $\vec{R}'$  là vectơ chính của hệ lực đã cho.

Hệ ngẫu lực không gian  $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n)$ , tổng đồng với một ngẫu lực  $\vec{m}$ :

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_n = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_O(\vec{F}_n) \\ \vec{m} &= \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i) = \vec{m}_O \end{aligned} \quad (3.14)$$

Định lý 3 – 2: Hệ lực không gian tổng hợp đồng quy với một trục và một trục khác thì hệ lực đó là hệ lực trục và trục khác trục. Lực trục tổng hợp thì tâm trục có vectơ lực bằng vectơ chính của hệ lực, còn trục khác trục có vectơ mômen bằng vectơ mômen chính của hệ lực đối với tâm trục.

Nhận xét:

1. Phương chiều và giá trị của lực trục không phụ thuộc vào tâm trục. Số biến đổi của trục khác trục theo tâm trục phù hợp với công thức (3.10)
2. Đối với hệ lực không gian, lực trục không nằm trong mặt phẳng của trục khác trục như trục khác trục (tức vectơ chính và vectơ mômen chính không vuông góc với nhau như trong trục khác trục phẳng). Đây là sự khác biệt của trục khác trục không gian và trục khác trục phẳng

### III. Điều kiện cân bằng và các phương trình cân bằng của hệ lực không gian

#### 1. Điều kiện cân bằng

Định lý 11 – 1: Điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian cân bằng là vectơ chính và vectơ mômen chính của hệ lực đối với một điểm bất kỳ triệt tiêu.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \\ \vec{m}_O = \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \quad (3 - 15)$$

Chứng minh: Điều kiện cần để chứng minh đưa vào dòng trục của hệ lực không gian. Theo vậy, nếu điều kiện (3 - 15) không được thỏa mãn thì hệ lực đã cho thu vào một trục trong các dòng: trục khác trục, trục khác trục khác trục và trục khác trục. Dễ dàng chứng minh rằng không có một dòng nào trong đó thỏa mãn tiên đề 1 về cân bằng.

Điều kiện đủ là hiển nhiên vì từ vectơ chính bằng không, hệ lực thu vào một trục khác trục có mômen bằng mômen chính của hệ lực đối với tâm trục, nó bằng không thì chứng tỏ trục khác trục là hai trục cân bằng.

#### 2. Các phương trình cân bằng của hệ lực không gian

Để vectơ chính và vectơ mômen chính triệt tiêu thì các hình chiếu của chúng trên ba trục tọa độ vuông góc phải triệt tiêu:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \\ \sum_{i=1}^n \bar{m}_x(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n \bar{m}_y(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n \bar{m}_z(\vec{F}_i) = 0; \end{aligned} \right\} \quad (3 - 16)$$

Định lý 3 – 3: Điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian cân bằng là tổng hình chiếu của các trục trên ba trục vuông góc và tổng mômen của các trục đối với ba trục liên hệ triệt tiêu.

Các phương trình (3-16) được gọi là các phương trình cân bằng của hệ lực không gian.

TĐ (3-16) có thể suy ra các phương trình cân bằng của các hệ lực để biết: Hệ lực để quy không gian; hệ lực không gian; hệ lực song song không gian. Đối với các hệ lực này sẽ phương trình cân bằng giảm xuống còn ba phương trình.

**Ví dụ:** Một trục kéo AB có đầu trục nằm ngang và đầu trục trên hai trục (bên trục) A và B. Hai nhánh đai có puli có đường kính  $D = 0,6\text{m}$  chịu các lực căng  $T_1 = 5\text{kN}$ ,  $T_2 = 2\text{kN}$ . Vật để kéo có trọng lượng  $P = 5\text{kN}$  và tang tời có đường kính  $d = 0,3\text{m}$ . Trục tời chịu tác động của ngoại lực có mômen  $M$ .

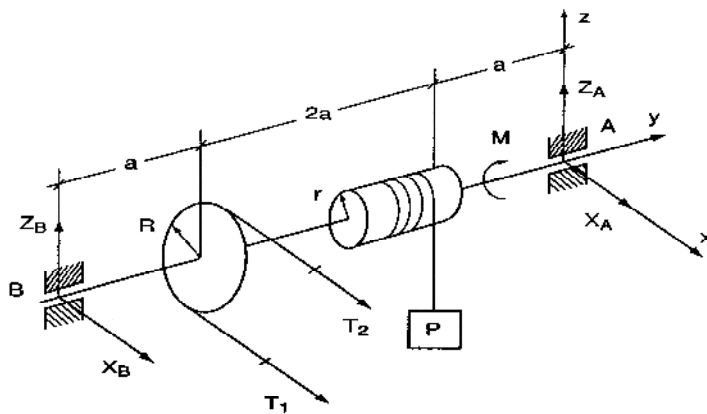
Xác định ngoại lực cần thiết để trục cân bằng và các phản lực tại các gối trục A và B. Biết qua ma sát, các kích thước cho trên hình vẽ.

### Giải

Trục kéo cân bằng dưới tác động của hệ lực:

$$(\vec{P}, \vec{M}, \vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B) \approx 0$$

Với trục toạ độ như hình vẽ các phương trình cân bằng của hệ lực có dạng:



$$\sum \vec{F}_x = T_1 + T_2 + X_A + X_B = 0$$

$$\sum \vec{F}_z = -P + Z_A + Z_B = 0$$

$$\sum \vec{m}_x(\vec{F}) = aP - 4aZ_B = 0$$

$$\sum \vec{m}_y(\vec{F}) = T_1 \frac{D}{2} - T_2 \frac{D}{2} - P \frac{d}{2} - M = 0$$

$$\sum \vec{m}_z(\vec{F}) = 3aT_1 + 3aT_2 + 4aX_B = 0$$

Thay các giá trị bằng hệ số vào hệ phương trình trên và giải ra ta nhận được:

$$X_A = -1,75 \text{ kN}; \quad Z_A = 3,75 \text{ kN}; \quad X_B = -5,25 \text{ kN}$$

$$Z_B = 1,25 \text{ kN}; \quad M = 0,15 \text{ kN}$$

Đây thành phần  $X_A$  và  $X_B$  có chiều ngược lại so với chiều trên hình vẽ.